PROBABILIDAD I
2º curso del Grado de Matemáticas
Curso 2016-2017

ESPACIOS DE PROBABILIDAD

1. Se lanza un dado equilibrado n veces. Calcular la probabilidad de obtener al menos un 6.

2. De una baraja francesa de 52 cartas, extraemos dos al azar. ¿Cual es la probabilidad de sacar al menos un as, cuando se extraen a la vez? ¿Y cuando se sacan de una en una, con reemplazamiento y sin reemplazamiento?

3. Una urna contiene 5 bolas rojas, 3 verdes, 2 azules y 4 blancas. Hallar la probabilidad de que en una muestra de 8 bolas, extraídas sin reemplazamiento, haya 2 rojas, 2 verdes, 1 azul y 3 blancas.

4. Hallar la probabilidad de que, al tirar 11 veces una moneda equilibrada, se obtenga la sexta cara en la undécima tirada.

5. De los 30 temas de un examen, un alumno sabe 18. Se le proponen dos tipos de examen:

   a) Se eligen 3 temas al azar y debe contestar bien 2.

   b) Se eligen 5 temas al azar y debe contestar bien 3.

   ¿Que tipo de examen debería elegir?

6. En una ciudad se publican tres periódicos A,B y C. El 30% de la población lee A, el 20% lee B y el 15% lee C; el 12% lee A y B, el 9% A y C el 6% B y C; finalmente, el 3% lee A, B y C. Se pide:

   a) Porcentaje de personas que leen al menos uno de los tres periódicos.

   b) Porcentaje que lee sólo A.

   c) Porcentaje que leen B o C, pero no A.

   d) Porcentaje de personas que o leen A, o no leen ni B ni C.

7. Sea un dado tal que la probabilidad de las distintas caras es proporcional al número de puntos inscritos en ellas. Hallar la probabilidad de obtener con este dado un número par.

8. Un exámen consta de 14 temas. Se eligen dos al azar y el alumno deberá escoger uno para contestarlo. Calcular la probabilidad de que a un alumno que ha preparado 5 temas, le toque al menos uno que sabe. ¿Cuál es el número mínimo de temas que debe preparar para que tenga una probabilidad superior a 1/2 de superar el examen?

9. Los cuatro grupos sanguíneos se reparten, en una población, según los porcentajes: A (43%), B (8%), AB (4%), O(45%). Teniendo en cuenta las incompatibilidades que existen entre los grupos, calcular la probabilidad de que dadas dos personas X e Y elegidas al azar, X pueda recibir sangre de Y, suponiendo que la población es muy grande.

10. Entre 5 ciudades situadas en los vértices ABCDE de un pentágono, un transportista parte de A y realiza viajes al azar de la siguiente forma: P(A→B)=2/3, P(A→E)=1/3, P(B→C)=2/3, P(B→A)=1/3, etc.

    Calcula la probabilidad de que el primer regreso a A lo haga por la ciudad contraria a la que fue en primer lugar y habiendo pasado una sola vez por D.

11. Consideramos un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ y sucesos $A, A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{A}$. Sobre estos cuatro sucesos planteamos las dos siguientes posibles implicaciones:

    a) Si $A_1 \cap A_2 \subset A \quad \Rightarrow \quad P(A) \geq P(A_1) + P(A_2) - 1$

    b) Si $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \subset A \quad \Rightarrow \quad P(A) \geq P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - 2$

    Cada una de ellas puede ser cierta o falsa. Probarlas o poner contraejemplos.

12. En un test de respuesta múltiple, una persona (que ha estudiado una proporción p de la asignatura) tiene que contestar una pregunta con m posibles respuestas, de las cuales sólo una es la correcta. Cuando no sepa que contestar, elegirá una de las m respuestas al azar. Si contesta correctamente, ¿cual es la probabilidad de que realmente supiese la respuesta?

13. Existen tres variedades diferentes de cierta planta: A (30%), B (10%) y C (60%). Los porcentajes del caracter "flores blancas" en cada variedad son, respectivamente, 20%, 40% y 5%.

    a) Probabilidad de que una planta elegida al azar tenga flores blancas.

    b) Si una planta elegida al azar tiene flores blancas, ¿a qué variedad es más probable que pertenezca?.

14. *(Prueba sistemática en enfermedad de poca incidencia)* Una prueba de diagnóstico (sencilla y no invasiva) para cierta enfermedad, tiene probabilidad 0,96 de resultar positiva si el paciente está enfermo; el 95% de los individuos sanos dan resultado negativo. Se somete a esa prueba a un individuo elegido al azar en una población en la cual el 0,5% tienen dicha enfermedad.

    Si la prueba da resultado positivo, ¿cuál es la probabilidad de que realmente está enfermo?

15. La cuarta parte de una población ha sido vacunada contra una enfermedad infecciosa. En el transcurso de una epidemia de dicha enfermedad, se constata que entre los enfermos hay un vacunado por cada 4 no vacunados.

    a) ¿Es de alguna eficacia la vacuna? Es decir, compara las probabilidades de enfermar entre los vacunados y los no vacunados.

    b) Si se sabe que la epidemia ha afectado a uno de cada 12 vacunados, ¿cuál era la probabilidad de caer enfermo para un individuo no vacunado?.

16. La probabilidad de que un sistema tenga n fallos durante un día viene dada por

$$P_n = \frac{1}{e(n!)} \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

    Si se presentan n fallos, el sistema deja de funcionar con probabilidad $1 - (1/2)^n$. Calcular la probabilidad de que el sistema haya tenido n fallos sabiendo que ha dejado de funcionar.

17. El color de una especie de mamíferos viene determinado por dos genes N y n. Puede haber ejemplares negros homocigóticos (NN), negros heterocigóticos (Nn) y blancos homocigóticos (nn).

    Una hembra negra procedente del cruce de un macho negro homocigótico (NN) con una hembra negra heterocigótica (Nn), se cruza con un macho blanco (nn).

    a) Si tiene 5 cachorros, probabilidad de que 2 sean negros y 3 sean blancos.

    b) Si tiene 3 cachorros, todos negros, probabilidad de que A sea homocigótica.

18. En tres grandes poblaciones A, B y C, la proporción de individuos con ojos claros es, respectivamente, 30%, 60% y 1%. Se toma al azar una de las tres poblaciones y de ella elegimos 10 individuos al azar, resultando que exactamente 2 tienen ojos claros. ¿A qué población es más probable que pertenezcan?

19. El 30% de los vuelos que llegan a un gran aeropuerto, son vuelos nacionales regulares, el 45% vuelos internacionales regulares y el 25% restante vuelos charter. El porcentaje de personas que viajan por razones de trabajo en cada tipo de vuelo son:

    En vuelos nacionales regulares, el 90%.

    En vuelos internacionales regulares, el 50%.

    En vuelos charter, el 10%.

    Las restantes viajan por diferentes motivos personales.

    Elegimos un avión al azar y entrevistamos a 3 personas al azar de las que acaban de bajar de ese avión, resultando que ninguna de ellas viaja por razones de trabajo. ¿Cuál es la probabilidad de que el vuelo fuera charter?

20. Un maestro y su alumno están tirando flechas con un arco. Cada vez que uno coge el arco hace una serie de cuatro disparos. Los disparos del alumno son independientes entre sí y lo mismo ocurre con los disparos del profesor. El 90% de los disparos del profesor dá en el blanco; el alumno (que acaba de empezar las clases) sólo consigue un 15% de dianas. Como el alumno tiene que ejercitarse, el 95% de las series de lanzamientos le corresponden a él. Observamos una de estas series de 4 disparos, en la que se obtienen en total 3 dianas (pero no conseguimos ver quien está disparando). ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido el profesor?

21. Se tienen 4 bolas blancas, 3 rojas y 3 negras; se toman al azar 2 de ellas y se introducen en una urna. A continuación se sacan 3 bolas con reemplazamiento de la urna que resultan ser todas rojas. ¿Cual es la probabilidad de que la urna no contenga ninguna negra?

Curiosidades:

22. Un concursante puede elegir entre 3 puertas: una tiene premio y las otras no.

    En primer lugar, el concursante elige una de las puertas. A continuación, el conductor del concurso abre una de las otras dos puertas (que no tiene premio) y le pregunta al concursante si quiere cambiar de puerta o continuar con la elegida inicialmente.

    ¿Es conveniente cambiar? ¿Es conveniente mantener la elección inicial? ¿Da lo mismo hacer una cosa u otra?

23. **La diferencia entre intención de voto directo y estimación de voto.**

En cierto país con dos partidos políticos, A y B, se lleva a cabo un sondeo sobre opinión electoral (lo podemos llamar barómetro de opinión) en el que se pregunta:

Suponiendo que mañana se celebrasen elecciones, ¿a qué partido votaría?

Los resultados son: 23% votaría A, 27% votaría B, y 50% de indecisos. Por tanto, en la **intención de voto directo**, saldría triunfador el partido B.

Pero hay un 50% de indecisos, de los cuales se puede intentar predecir el comportamiento, ya que en ese mismo sondeo, se hacen otras preguntas mediante las cuales se puede hacer un perfil (conservador o progresista) de las personas, y además, se les pregunta qué votaron en las últimas elecciones.

Supongamos que los resultados de ese sondeo son los siguientes:

(a) Del 50% de indecisos, un 30% tiene un perfil progresista. De estos, un 10% votaron A en las últimas elecciones, y un 60% votaron B (el resto no votaron o votaron en blanco).

(b) Del 50% de indecisos, un 70% tiene un perfil conservador. De estos, un 60% votaron A en las últimas elecciones, y un 10% votaron B (el resto no votaron o votaron en blanco).

A partir de toda esta información, y suponiendo que los indecisos terminarán manteniendo un patrón de comportamiento similar al de las últimas elecciones, calcula la **estimación de voto**.

VARIABLES ALEATORIAS

1. Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ k - x & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Hallar k. Comprobarlo gráficamente.

b) Hallar la función de distribución, E[X] y V(X).

2. Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} k(1+x^2) & \text{si } x \in (0,3) \\ 0 & \text{si } x \notin (0,3) \end{cases}$$

Se pide:

(a) Hallar la constante k y la función de distribución.

(b) Probabilidad de que X esté comprendida entre 1 y 2.

(c) Probabilidad de que X sea menor que 1.

(d) Sabiendo que X es mayor que 1, probabilidad de que sea menor que 2.

3. La función de densidad de una variable aleatoria contínua es:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x \in (0,2) \\ 0 & \text{si } x \notin (0,2) \end{cases}$$

Determina aproximadamente a y b, sabiendo que $P(1/2 < X \leq 1) \simeq 0,1357$.

4. En cierta línea de Cercanías pasa un tren cada 20 minutos. Si una persona llega a la estación al azar, hallar:

a) Función de distribución de la variable aleatoria "tiempo de espera".

b) Probabilidad de que tenga que esperar al tren menos de 7 minutos.

c) Esperanza y varianza de la variable aleatoria "tiempo de espera".

d) Probabilidad de que espere exactamente 12 minutos.

5. La acidez X de cierto compuesto depende de la proporción Y de uno de sus componentes qu!ímicos y viene dada por la relación $X = (1+Y)^2$. La proporción Y es una variable aleatoria con función de densidad

$$f(y) = \begin{cases} 2y & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Calcular la función de distribución de la variable X, su función de densidad, la acidez media del compuesto y la varianza de X.

6. En cierto país, la proporción de cierto aditivo en la gasolina determina su precio. Supongamos que en la producción de gasolina, la proporción de aditivo es una variable aleatoria X con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Si $X < 0,50$ tendremos gasolina del tipo 1 a 80 pesos el litro, si $0,50 \leq X \leq 0,80$ tendremos gasolina del tipo 2 a 90 pesos el litro y si $X > 0,80$ tendremos gasolina del tipo 3 a 100 pesos el litro.

a) Representar gráficamente la densidad y calcular la función de distribución de X.

b) Calcular los porcentajes de producción de cada tipo de gasolina.

c) Calcular el precio medio por litro.

7. En un puesto de feria en cierto país se ofrece la posibilidad de lanzar un dardo a unos globos. Si se consigue reventar un globo, se recibe el premio que figura en un papel contenido en el globo. Supongamos que la probabilidad de acertar con algún globo es 1/3.

   Los premios se distribuyen de la siguiente manera:

   40% de premios de 50 pesos

   30% de premios de 100 pesos

   20% de premios de 250 pesos

   10% de premios de 1000 pesos

   Si cada lanzamiento cuesta 150 pesos, ¿cuál es la ganancia esperada del dueño del puesto en cada lanzamiento?

8. El ahorro en euros de una persona (durante cierto período de tiempo) es una variable aleatoria con función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-(x/500)^2} & \text{si } \ x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-(x/500)^2} & \text{si } \ x \geq 0 \end{cases}$$

   a) Hallar la función de densidad.

   b) Calcular la probabilidad de que el ahorro de una persona en ese período esté entre -200 y 500 euros.

   c) ¿Cual es la probabilidad de que el ahorro de una persona sea inferior a 1000 euros, si se sabe que es mayor que 500?

9. Sea X una variable aleatoria con función de distribución:

$$F_\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x < 0 \\ \theta x & \text{si } \ 0 \leq x \leq \theta \\ 1 & \text{si } \ x \geq \theta \end{cases} \qquad \text{donde } \theta \in [0,1]$$

   a) Hallar la distribución de $Y = X^2 - 2$

   b) Hallar $E[X],\ E[Y],\ E[e^X]$.

   c) Hallar los valores de θ para los que X es variable aleatoria continua y dar su función de densidad.

   d) Hallar los valores de θ para los que X es discreta y dar su función de masa.

10. La variable aleatoria X="Duración en minutos de las llamadas telefónicas" viene representada por la función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-x/2} & \text{si } \ x > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

   Determinar α, hallar la función de distribución y calcular la probabilidad de que una conversación dure entre 3 y 6 minutos.

11. Consideramos la variable aleatoria $Y : (\Re, \mathcal{B}, \mathcal{P}) \to (\Re, \mathcal{B})$ definida por

$$Y(x) = \begin{cases} -2 \ \ln x & \text{si } \ x > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

   Calcular la función de distribución de Y, si P viene dada por la función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ x \in [0,1] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

12. Sea X una variable aleatoria discreta tomando valores 1, 2, ...Probar que $E[X] = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n)$.

13. Supongamos que la función de densidad de la variable aleatoria X es

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } \ x > 0 \\ 0 & \text{si } \ x \leq 0 \end{cases}$$

   Halla la función de distribución de la variable aleatoria $Y = g(X)$, donde

$$g(x) = \begin{cases} -x & \text{si } \ x < 0 \\ x^{1/2} & \text{si } \ x \geq 0 \end{cases}$$

14. La variable aleatoria X tiene distribución uniforme en el intervalo (-3;3). Obtener la función de distribución de la nueva variable aleatoria $Y = h(X)$, donde

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{si } \ x < 2 \\ 4 - x & \text{si } \ x \geq 2 \end{cases}$$

15. $(\Re, \mathcal{B}, \mathcal{P})$ es un espacio de probabilidad en el que P viene dado por la función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} e^x/2 & \text{si } \ x < 0 \\ 1 & \text{si } \ x \geq 0 \end{cases}$$

Obtener la función de distribución inducida por la variable aleatoria:

$$g(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } \ x \text{ es racional} \\ -x & \text{si } \ x \text{ es irracional} \end{cases}$$

VECTORES ALEATORIOS

1. Sea X la variable aleatoria "suma de los puntos obtenidos en n tiradas de un dado equilibrado". Hallar la esperanza de X.

2. Se tira dos veces un dado equilibrado. Consideremos las variables aleatorias $X =$ "Número de puntos del primer dado" e $Y =$"Número mayor de los dos obtenidos".

   a) Hallar la funcion de masa conjunta y las marginales

   b) Calcular las probabilidades de los distintos valores de X si sabemos que $Y = 4$.

3. a) Dos personas A y B quedan en llegar a un lugar durante un intervalo de una hora, y las dos llegan independientemente y al azar a ese lugar. Si llamamos X="Instante de llegada de A" e Y="Instante de llegada de B", escribir la función de densidad conjunta de (X, Y). Si acuerdan que el primero que llegue espera al otro un cuarto de hora y después se va, ¿cuál es la probabilidad de que se encuentren?

   b) Supongamos ahora que la función de densidad conjunta de (X, Y) fuera:

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

   Calcula las densidades marginales de X eY. ¿Siguen siendo independientes las llegadas de ambos?

4. La función de densidad conjunta de un vector aleatorio (X, Y) es:

$$f(x, y) = \begin{cases} k(x + xy) & \text{si } x \in (0, 1) \text{ e } y \in (0, 1) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   (a) Valor de k.

   (b) Funciones de densidad marginales.

   (c) ¿X e Y son independientes?

5. Sea (X, Y) un vector aleatorio que tiene por función de densidad:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } |y| < x, 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

   a) Comprobar que es función de densidad.

   b) Hallar las esperanzas de X e Y.

   c) Hallar $P(X < 1/2; Y < 0)$ y $P(X > 1/2; -1/2 < Y < 1/2)$

6. Dos características X e Y son variables aleatorias con función de densidad conjunta:

$$f(x, y) = \begin{cases} kye^{-2x}e^{-y} & \text{si } x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

   a) Hallar el valor de k. ¿Son independientes X e Y?

   b) Calcular la esperanza de X.

7. Dos sustancias A y B se encuentran en la sangre en cantidades X e Y, respectivamente. Estas cantidades varían de un individuo a otro. La densidad conjunta de estas cantidades es:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{81}xy^2 & si \;\; 0 < x < 3, \;\; 0 < y < 3 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

   a) Densidad marginal de Y y esperanza de Y.

   b) Probabilidad de que, en un individuo tomado al azar, haya mas sustancia A que B.

8. El vector aleatorio (X,Y) tiene como función de densidad

$$f(x, y) = \begin{cases} 15x^2y & \text{si } (x, y) \in R \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

   donde R es el triángulo limitado por las rectas $x = 0$, $y = 1$ y $x = y$.

   a) Hallar la densidad marginal de X.

   b) Hallar la esperanza de X.

9. La proporción en sangre de dos compuestos, X e Y, en una especie de ratones es variable. Su distribución conjunta en toda la población se caracteriza mediante la función de densidad

$$f(x,y) = \begin{cases} k(1-x)y^2 & \text{si } 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Un ratón se considera sano si ambas concentraciones son inferiores a $3/4$.

a) Hallar el valor de k. Decidir si X e Y son independientes.

b) Hallar la concentración media del compuesto Y en la especie.

c) Hallar la probabilidad de que un ratón elegido al azar esté sano.

10. Sea (X,Y) un vector aleatorio tal que $P(X=1,Y=0) = P(X=0,Y=1) = P(X=1,Y=1) = 1/3$. Calcular la función de distribución conjunta y las funciones de distribución marginales.

11. Sea (X,Y) un vector aleatorio con distribución uniforme en el recinto limitado por $y = x/3$, $x = 3$, $y = 0$. Calcular las funciones de densidad y distribución conjunta y marginales.

12. La función de densidad del vector aleatorio (X,Y) es:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & si\ 0 < x < y, \quad 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Calcular las funciones de densidad marginales y condicionadas.

13. Calcular densidades conjunta, marginales y condicionadas de (X_1,X_2) sabiendo que X_1 tiene densidad $f_1(x_1) = e^{-x_1}$ $(x_1 > 0)$ y $X_2|X_1 = x_1$ tiene densidad $f(x_2|x_1) = \frac{x_1}{x_2^{x_1+1}}$ $(x_2 > 1)$.

14. Encontrar tres variables aleatorias X, Y y Z que sean independientes dos a dos, pero no sean conjuntamente independientes.

15. Sea (X_1,X_2) un vector aleatorio con densidad uniforme en el cuadrado $(0,1)\times(0,1)$.

a) Calcular la distribución de $X_1 + X_2$.

b) Distribución de $Y = (Y_1,Y_2)$, siendo $Y_1 = X_1 + X_2$ e $Y_2 = X_1 - X_2$.

16. Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes y con la misma función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & si\ x > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Calcula la densidad conjunta de (Y_1,Y_2), donde $Y_1 = X_1 + X_2$ e $Y_2 = \frac{X_1}{X_1+X_2}$. ¿Son independientes Y_1 e Y_2?

17. Supongamos que el vector aleatorio (X_1,X_2) tiene densidad uniforme en $(0,1)\times(0,1)$. Calcula la densidad conjunta de (Y_1,Y_2), donde $Y_1 = X_1^2$ e $Y_2 = X_1^2 + X_2^2$. ¿Son independientes Y_1 e Y_2?

18. X e Y son variables aleatorias independientes, cada una de ellas con densidad:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & si\ x > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Calcular la distribución de $Z = |X-Y|$.

19. La variable aleatoria bidimensional (X,Y) tiene por función de densidad:

$$f(x,y) = \begin{cases} kye^{-2x}e^{-y} & si\ x,y > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Determinar el valor de k. ¿Son independientes X e Y? Hallar $P(X+Y \leq 1)$.

20. X e Y son dos variables aleatorias independientes con $E[X] = E[Y] = 0$.

a) Estudiar si es cierto en general que

$$E[(X+Y)^3] = E[X^3] + E[Y^3]$$

b) Estudiar si es cierto en general que:

$$E[(X+Y)^4] = E[X^4] + E[Y^4]$$

Curiosidades:

21. Un intervalo de longitud 1 es dividido en tres partes, eligiendo dos puntos al azar e independientemente el uno del otro. ¿Cual es la probabilidad de que los tres segmentos formen un triángulo?

22. (Problema de la aguja de Buffon). Una aguja de longitud l es lanzada al azar sobre un plano dotado de una serie de lineas paralelas separadas por una distancia $2l$. ¿Cual es la probabilidad de que la aguja corte a una de las paralelas?

MODELOS DE PROBABILIDAD Y CONVERGENCIA

1. Suponiendo que la probabilidad de que un hijo que nace sea niño es 0,50, hallar la probabilidad de que una familia de 6 hijos tenga

   a) por lo menos una niña,

   b) por lo menos un niño,

   c) por lo menos dos niños y una niña.

2. La longitud de una pieza se distribuye según la función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} k(x-1)(3-x) & \text{si } x \in [1,3] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

   a) Si una pieza es útil cuando $1,7 < X < 2,4$, calcular la probabilidad de que una pieza sea útil.

   b) Si las piezas se empaquetan en lotes de 5 unidades y se acepta el lote si contiene menos de 2 piezas defectuosas, ¿cual es la probabilidad de que un lote sea rechazado?

3. Una compañía de seguros con 10000 asegurados halla que el 0,005% de la población fallece cada año de un cierto tipo de accidente.

   a) Hallar la probabilidad de que la compañía tenga que pagar a más de tres asegurados, por dicho accidente, en un año determinado.

   b) ¿Cuál es el número medio de accidentes por año?

4. La probabilidad de que un individuo tenga una reacción alérgica al inyectarle un suero es 0,001. Hallar la probabilidad de que en 2000 individuos tengan reacción alérgica:

   a) exactamente tres,

   b) más de 2.

5. El tiempo de vida (en minutos) de un determinado organismo, es una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1000} e^{-\frac{x}{1000}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

   a) Probabilidad de que el tiempo de vida sea superior a 100 minutos e inferior a 1000 minutos.

   b) Observamos el organismo a los 500 minutos y comprobamos que ha muerto. ¿Cuál es la probabilidad de que estuviese vivo a los 100 minutos?

6. La variable aleatoria X=“Tiempo transcurrido (en horas) hasta el fallo de una pieza” tiene función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{15000}\, e^{-\frac{x}{15000}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

   a) Calcular el tiempo medio transcurrido hasta el fallo.

   b) Calcular el porcentaje de piezas que duran entre 10000 y 15000 horas.

7. Un pájaro de cierta especie come mariposas de una población muy grande. Estas mariposas pueden comer, a su vez, de una planta venenosa, de manera que si el pájaro come una mariposa envenenada, deja de comer mariposas ese día. Suponiendo que el 40% de la población de mariposas come de la planta venenosa, hallar el número medio de mariposas comidas en un día por el pájaro.

8. Un lepidopterista está interesado en los ejemplares de una clase de mariposas que constituyen el 15% de todas las mariposas de la zona. Hallar la probabilidad de que tenga que cazar 10 mariposas de las que no le interesan antes de encontrar

   a) un ejemplar de la clase deseada,

   b) tres ejemplares de la clase deseada.

9. El cociente o coeficente intelectual es una variable aleatoria que se distribuye según una $N(\mu = 100;\ \sigma = 16)$. Calcular:

   a) La probabilidad de que un individuo elegido al azar tenga un coeficiente superior a 120.

   b) Suponiendo que los graduados universitarios tienen un coeficiente superior a 110, hallar la probabilidad de que un graduado tenga un coeficiente superior a 120.

10. En una ciudad, la longitud (en mm.) del dedo medio de la mano derecha de los varones es una variable aleatoria que sigue una distribución $N(\mu = 60, \sigma = 3)$. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los dedos medios de la mano derecha de tres varones, elegidos al azar en esta ciudad, sea inferior a 183 mm.?

11. El peso de las personas de una población sigue una distribución Normal con media 72 Kg y desviación típica 10.

    a) Cuatro personas elegidas independientemente y al azar en esa población entran en un ascensor cuya carga máxima es de 350 Kg. ¿Cuál es la probabilidad de que entre los cuatro superen esa carga máxima?.

    b) ¿Cuál es la probabilidad de que dos personas, elegidas independientemente y al azar en esa población, puedan jugar en un balancín, si sólo pueden hacerlo cuando sus pesos difieren en menos de 5 Kg?

12. Una línea eléctrica se avería cuando la tensión sobrepasa la capacidad de la línea. Si la tensión es $N(\mu = 100;\ \sigma = 20)$ y la capacidad es $N(\mu = 140;\ \sigma = 10)$, calcular la probabilidad de avería.

13. Un botánico ha observado que la anchura, X, de las hojas del álamo sigue una distribución $N(\mu, \sigma)$ con $\mu = 6$ cm. y que el 90% de las hojas tiene una anchura inferior a 7,5 cm.

    Hallar σ. Hallar la probabilidad de que una hoja mida más de 8 cm.

14. La anchura en mm. de una población de coleópteros sigue una distribución $N(\mu, \sigma)$. Se estima que el 77% de la población mide menos de 12 mm. y que el 84% mide más de 7 mm.

    Determina los parámetros μ y σ.

15. Una fábrica produce fusibles eléctricos, resultando defectuosos el 3%. Los fusibles se empaquetan en cajas de 50 unidades.

    a) Calcular la probabilidad de que una caja elegida al azar contenga al menos un fusible defectuoso.

    b) Si seleccionamos 5 cajas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente en 2 de ellas no hubiera ningún fusible defectuoso?

    c) Vamos seleccionando fusibles al azar y comprobando si son defectuosos o no. ¿Cuál es el número medio de fusibles que tendremos que inspeccionar hasta encontrar alguno defectuoso?

16. Un zoólogo estudia una cierta especie de ratones de campo. Para ello captura ejemplares de una población grande en la que la proporción de dicha especie es p.

    a) Si $p = 0,30$, hallar la probabilidad de que en 6 ejemplares capturados haya al menos 2 de los que le interesan.

    b) Si $p = 0,03$, calcular la probabilidad de que en 200 haya exactamente 3 de los que le interesan.

    c) Si $p = 0,40$, calcular la probabilidad de que en 200 haya entre 75 y 110 de los que le interesan.

    d) Si $p = 0,20$, calcular el número medio de ejemplares que tendrá que capturar para encontrar uno de la especie que le interesa.

17. En una población, la cantidad de plomo, X, presente en la sangre de una persona elegida al azar es una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} x/300 & \text{si } 0 < x < 20 \\ (50 - x)/1350 & \text{si } 20 < x < 50 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

    a) Cantidad media de plomo en la sangre de los individuos de la población.

    b) Elegimos una persona al azar. Probabilidad de que la cantidad de plomo en su sangre sea inferior a 20.

    c) Probabilidad de que en 40 personas elegidas al azar, haya entre 20 y 30 personas con una cantidad de plomo inferior a 20.

18. La capacidad de enrollar la lengua está controlada por una pareja de genes: el gen E que determina su enrollamiento y el gen e que lo impide. El gen E es dominante, de modo que una persona Ee será capaz de enrollar la lengua.

    En una ciudad grande se sabe que aproximadamente el 40% no puede enrollar la lengua y el 60% si puede. De estos últimos, el 70% son Ee y el 30% son EE.

    a) Si elegimos 200 personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que más de 70 no puedan enrollar su lengua?

    b) Un hombre con lengua enrollable se casa con una mujer con lengua no enrollable y tienen tres hijos con lengua enrollable. ¿Cuál es la probabilidad de que el hombre sea EE?

19. En el grupo A, la estatura de las personas (en cm.) sigue una distribución N($\mu = 165$; $\sigma = 5$), en el grupo B sigue una N($\mu = 170$; $\sigma = 5$), y en el grupo C sigue una N($\mu = 175$; $\sigma = 5$). Los tres grupos son muy numerosos.

    a) Si elegimos una persona al azar del grupo A, ¿cuál es la probabilidad de que mida más de 160 cm?

    b) Si elegimos 10 personas al azar del grupo A, independientemente unas de otras, ¿cuál es la probabilidad de que entre todas midan más de 1600 cm?

    c) En una ciudad, el 50% de la población pertenece a A, el 20% pertenece a B y el 30% restante a C. Si elegimos una persona al azar en esta ciudad y mide más de 172 cm, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca al grupo C?

    d) Si elegimos 100 personas al azar del grupo B, independientemente unas de otras, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 50 midan más de 172 cm?

20. Sea (X_n) una sucesión de variables aleatorias tales que $X_n \sim U(-n, n)$. ¿Converge en distribución?

21. Sea $X_n^* = \max_{i=1,\ldots,n}(X_i)$ donde (X_i) son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución F continua. Estudiar la convergencia en distribución de $Y_n = n(1 - F(X_n^*))$.

22. Sea (X_n) una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución uniforme en (0,1). Para $n = 1, 2, \ldots$, definimos $Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$, $Z_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$. Estudiar la convergencia en distribución de Y_n y de Z_n.

23. Cuando un colegio organiza una representación teatral se sabe que, en general, asisten:

    En el 30% de los casos, el padre y la madre.

    En el 50% de los casos, sólo uno de los dos.

    En el 20% restante, ninguno de los dos.

    Un colegio, al que asisten 600 niños, decide organizar una de estas representaciones, pero sólo cuenta con 700 sillas. Suponiendo que las familias de los diferentes niños actúan independientemente unas de otras, calculad (aproximadamente) la probabilidad de que haya sillas para todos los progenitores.

Curiosidades:

24. Paradoja del segundo as:

    Primer caso.- Se dispone de una baraja francesa de 52 cartas. Se barajan y se reparten en 4 montones de 13 cartas. Alguien mira el primer montón y nos dice: "Por lo menos, hay un as". Calcular la probabilidad de que haya algún otro as en ese montón.

    Segundo caso.- Se dispone de una baraja francesa de 52 cartas. Se barajan y se reparten en 4 montones de 13 cartas. Alguien mira el primer montón y nos dice: "Por lo menos, está el as de picas". Calcular la probabilidad de que haya algún otro as en ese montón .